Revista EJES

# ¿Monogamia o poligamia entre definiciones y objetos matemáticos?

*Alexander Umbarila Forero*[1]
*Nancy Edith Tovar Ojeda*[2]
*Edgar Alberto Guacaneme Suárez*[3]

## Introducción

En el estudio que en el marco de nuestro trabajo de grado realizamos sobre el papel de las razones y proporciones geométricas en la definición de las cónicas en la obra de Apolonio de Perga, nos encontramos con un hecho aparentemente menor: en una obra matemática se emplea más de una definición de un mismo objeto matemático; en efecto, Apolonio, en su magistral obra sobre las secciones cónicas (Heath, 1896), utiliza diferentes definiciones de circunferencia (aunque también diferentes definiciones de círculo). Este hecho comenzó a cobrar importancia cuando lo contrastamos con nuestra creencia (hasta ese momento un tanto inconsciente) de que a cada objeto matemático le corresponde, de manera monógama (o más técnicamente biyectiva), una y solo una definición. Un nuevo matiz se le agregó a tal hecho, cuando tuvimos acceso a un breve artículo (Van Dormolen & Arcavi, 2000) en el que, desde nuestra interpretación, se plantea que escolarmente las definiciones de los objetos matemáticos deben atender al significado que la actividad matemática realizada sobre el objeto le asigne. Adicionalmente, nuestra reflexión sobre tal hecho se complejizó cuando tuvimos acceso a dos trabajos de grado, uno de pregrado (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013b) y otro de postgrado (Ortiz Gómez & Yopasá Murcia, 2013), en donde se ampliaba el repertorio de definiciones de circunferencia (y eventualmente de círculo).

En el presente escrito inicialmente se acopian algunos aspectos sobre las definiciones de circunferencia, para luego presentar algunos elementos de nuestra reflexión sobre la relación monógama o polígama entre definiciones y el objeto matemático circunferencia.

## Definiciones de circunferencia

En la obra de Apolonio se identifica la alusión a los objetos círculo y circunferencia desde el inicio de la obra, cuando se establecen estos como parte de los objetos implicados en la construcción de un cono (o más precisamente de un cono doble):

> If a straight line indefinite in length, and passing always through a fixed point, be made to move round the circumference of a circle which is not in the same plane with the point, so as to pass successively through every point of that circumference, the moving straight line will trace out the surface of a double cone, or two similar cones lying in opposite directions and meeting in the fixed point, which is the apex of each cone. (Heath, 1896, p. 1)

Suponemos que acá los términos "circunferencia" y "círculo" atienden a la definición euclidiana reportada en *Elementos*[4], hoy en día parafraseada en la definición usual[5] que alude a un radio constante y un punto centro. Esta suposición se basa en que en la demostración de la proposición I.4 (Heath, 1896, pp. 1-2), a través de la cual establece que la circunferencia (o el círculo) es la sección resultante del corte de un cono con un plano paralelo a la base del cono, Apolonio emplea el hecho de que uno de los segmentos genéricos utilizados es de longitud constante y uno de sus extremos es un punto fijo.

Por otra parte en la demostración de la proposición I.5 (Heath, 1896, pp. 2-3), a través de la cual se define

1. Estudiante Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma217_aumbarila@pedagogica.edu.co
2. Estudiante Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: dma927_ntovar@pedagogica.edu.co
3. Magister en Educación Matemática. Profesor, Licenciatura en Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Colombia; e-mail: guacaneme@pedagogica.edu.co

4. "Un círculo es una figura plana comprendida por una línea [que se llama circunferencia] tal que todas las rectas que caen sobre ella desde un punto de los que están dentro de la figura son iguales entre sí." (Puertas, 1991, p. 193).
5. Sea $P$ un punto de un plano dado y $r$ un número positivo. La circunferencia con centro $P$ y $r$ radio es el conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia $r$ del punto.

y caracteriza la sección subcontraria [6], Apolonio emplea una definición alterna de circunferencia al reseñar que se satisface una condición de media proporcional entre unos segmentos; en efecto, en tal demostración señala que se satisface la condición $DM \cdot ME = PM^2$, o lo que es casi-equivalente que se satisface la proporción $\frac{DM}{PM} = \frac{PM}{ME}$, que establece un vínculo con la circunferencia, como se aprecia en la Figura 1.

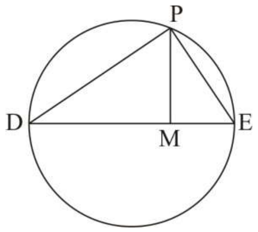


Figura 1 Circunferencia definida a través de la media proporcional

Siendo un tanto laxos, hemos identificado hasta acá en la obra de Apolonio cuatro definiciones de circunferencia. Una alude a los puntos que equidistan de un punto central, otra la establece como sección resultante del corte del cono con un plano paralelo a su base; una tercera la identifica con la sección subcontraria y otra con los puntos que satisfacen una proporción particular.

En un trabajo de grado (Ortiz Gómez & Yopasá Murcia, 2013) de la Especialización en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional, identificamos otras definiciones matemáticas de circunferencia[7]. Allí, por ejemplo se incluye:

- la definición que se da en el ámbito de la Geometría analítica (Una circunferencia es el conjunto de puntos en el plano *x*, *y* que están a una distancia fija *r* de un punto fijo *(h ,k)*. La distancia *r* se llama radio y el punto fijo *(h ,k)* se llama centro de la circunferencia, además *r* estará dado por $r=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$),
- la definición algebraica asociada a la ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+EY+F=0$ que establece la circunferencia como el conjunto de parejas ordenadas de variable real que satisfacen tal ecuación (bajo algunas condiciones de los coeficientes),
- y la definición topológica que establece que un círculo es un caso particular de una bola abierta definida en un espacio métrico *(x,d)* y, por tanto, una circunferencia es un caso particular de la frontera de dicha bola.

En otro trabajo de grado, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, identificamos el reporte de una definición alterna de circunferencia, como "el lugar geométrico de los puntos $C=(x,y)$ para los cuales su distancia a dos puntos dados $A=(x_1,y_1)$ y $B=(x_2,y_2)$ satisface la condición $d(A,C)=a \cdot d(B,C)$ con $a \in \mathbb{R}^+$" (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013b, p. 83). Vale la pena reseñar que en esta definición los puntos *A* y *B* no pertenecen a la circunferencia ni ninguno de los dos constituye su centro, como lo reseñaron las autoras del trabajo en una ponencia (Espitia Florián & Solano Bernal, 2013a).

**Nuestra reflexión (en curso)**

Hoy en día tenemos claro que existen diferentes definiciones matemáticas de circunferencia y estamos abiertos a la posibilidad de encontrar otras; por ejemplo, recientemente hemos sido conscientes de que pensar en la trayectoria que describe una bicicleta al moverse con la misma velocidad y teniendo el manubrio inclinado en la misma dirección, nos aproxima a la definición de circunferencia como curva de curvatura constante, en el ámbito de la Geometría diferencial.

La diversidad de definiciones identificada nos lleva a entender que el manejo de un concepto matemático (en este caso el de circunferencia) no se restringe a la comprensión y empleo de una única definición del mismo; igualmente, nos permite entender que cada definición captura algunos aspectos o propiedades del objeto en cuestión, pero no todos los que se expresan en todos sus ámbitos matemáticos de aparición.

Ahora bien, en nuestra calidad de futuros profesores de Matemáticas, este asunto es de vital importancia, pues nos permite ser conscientes que el aprendizaje de un objeto matemático por parte de nuestros estudiantes no se restringe a la repetición y uso de una "buena" definición, sino que incluye la construcción de buenas y variadas definiciones del objeto, a partir del significado que se asocie a diversas actividades matemáticas realizadas con este.

[6] "There are two series of circular sections of an oblique cone, one series being parallel to the base, and the other consisting of the sections subcontrary to the first series." (Heath, 1896, p. 3)

[7] En ese mismo trabajo se acopian también interesantes definiciones no matemáticas y significados de circunferencia, asociados a actividades culturales y sociales de gente de diversas épocas y etnias.

No obstante lo anterior, aún persiste una duda: si suponemos que significados diferentes generan objetos diferentes, y por tanto definiciones diferentes, ¿existirán tantos objetos matemáticos como definiciones y, en consecuencia, relaciones monógamas entre estos? o ¿persistirán las relaciones polígamas entre estos y estas?

**Referencias**


Espitia F., K. T., & Solano B., A. S. (2013a). *¿Circunferencias sin centro ni radio?* Comunicación corta presentada en la 4ª Escuela Colombiana de Historia y Educación Matemática, Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Espitia F., K. T., & Solano B., A. S. (2013b). *Dos cursos de Matemáticas-Tecnología analizados desde la perspectiva curricular colombiana.* Licenciatura en Matemáticas Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Heath, T. L. (1896). *Apollonius of Perga. Treatise on Conic Sections*. Cambridge: University Press.

Ortiz G., N. J., & Yopasá M., M. (2013). *Memorias de un curso sobre historia de las curvas matemáticas.* Especialización en Educación Matemática Trabajo de grado no publicado, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, D.C.

Puertas, M. L. (1991). *Euclides. Elementos. Libros I-IV*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Van Dormolen, J., & Arcavi, A. (2000). What is a circle? *Mathematics in School, 29*(5), 15-19.